

DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS

Nous cherchons dans ce chapitre à approximer les fonctions par des fonctions polynomiales au voisinage d'un point, généralement 0. Par exemple, nous savons que $\cos x \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + o(1)$, ce qui signifie que la meilleure approximation du cosinus au voisinage de 0 par une fonction polynomiale de degré 0 est 1. Mais nous avons aussi vu mieux : $\cos x \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$; ceci montre que la meilleure approximation du cosinus par une fonction polynomiale de degré 2 est $x \mapsto 1 - \frac{x^2}{2}$.

Dans tout ce chapitre, $I, J \dots$ sont des intervalles de \mathbb{R} .

1 DÉFINITIONS ET PREMIÈRES PROPRIÉTÉS

Définition (Développement limité) Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une application, $a \in \bar{I} \cap \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. On dit que f possède un développement limité à l'ordre n au voisinage de a s'il existe des réels a_0, a_1, \dots, a_n tels que :

$$f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} a_0 + a_1(x-a) + \dots + a_n(x-a)^n + o((x-a)^n).$$

⚡ ⚡ ⚡ **Explication** Pour une fonction, posséder un développement limité à l'ordre n au voisinage de a , c'est pouvoir être approximée de façon pertinente par une fonction polynomiale de degré n . Mais pourquoi écrit-on dans ce contexte les fonctions polynomiales approximantes au moyen de monômes de la forme $(x-a)^k$ où $k \in \mathbb{N}$? Pourquoi n'est-il pas intéressant d'écrire : $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n + o(x^n)$?

Parce qu'on travaille au voisinage de a , les monômes $(x-a)^k$ pour $k \in \mathbb{N}$ sont des quantités très petites, de limite nulle en a (sauf pour $k=0$). Qui plus est, plus k grandit, plus $(x-a)^k$ est proche de 0 au voisinage de a . Ces remarques aident à comprendre pourquoi le développement limité $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} a_0 + a_1(x-a) + o(x-a)$ est par exemple une approximation moins précise de f au voisinage de a que le développement limité $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + o((x-a)^2)$. Si on remplaçait les $(x-a)$ par des x , en supposant $a \neq 0$, on perdrait cette idée que plus l'ordre du développement est grand, plus la précision obtenue est fine.

Remarque

- On peut ramener tout développement limité au voisinage de a à un développement limité au voisinage de 0. C'est utile en pratique, comme nous le verrons. Précisément, si on a : $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} a_0 + a_1(x-a) + \dots + a_n(x-a)^n + o((x-a)^n)$, alors on a, en composant **à droite** par la fonction $x \mapsto x+a$: $f(x+a) \underset{x \rightarrow 0}{=} a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n + o(x^n)$. L'opération inverse est tout aussi possible.
- Supposons qu'on ait un développement limité de f à l'ordre n : $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} a_0 + a_1(x-a) + \dots + a_n(x-a)^n + o((x-a)^n)$. Alors on dispose aussi d'un développement de f à tout ordre $m \leq n$: $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} a_0 + a_1(x-a) + \dots + a_m(x-a)^m + o((x-a)^m)$. Cette opération d'oubli des termes de degré compris entre $m+1$ et n s'appelle une *troncature* de développement limité. L'idée est simple : qui peut le plus (en précision) peut le moins.
- Supposons qu'on ait un développement limité de f à l'ordre n : $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} a_0 + a_1(x-a) + \dots + a_n(x-a)^n + o((x-a)^n)$. Les premiers coefficients de ce développement sont peut-être nuls, éventuellement tous ; notons p , s'il existe, l'indice du premier coefficient non nul. Alors : $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} a_p(x-a)^p + a_{p+1}(x-a)^{p+1} + \dots + a_n(x-a)^n + o((x-a)^n)$. Si nous tronquons ce développement, nous obtenons donc également : $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} a_p(x-a)^p + o((x-a)^p)$, ce qui s'écrit aussi : $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} a_p(x-a)^p$. Conclusion : le premier monôme non nul dans un développement limité est un équivalent de la fonction considérée au point considéré. Les développements limités peuvent donc servir à calculer des équivalents, et donc aussi des limites.

Exemple Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\frac{1}{1-x} \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n x^k + o(x^n) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x + x^2 + \dots + x^n + o(x^n)$.

En effet Soit $n \in \mathbb{N}$. On a, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$: $\sum_{k=0}^n x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$,

donc : $\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^n x^k + \frac{x^{n+1}}{1-x} = \sum_{k=0}^n x^k + x^n \frac{x}{1-x} \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n x^k + x^n o(1) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n x^k + o(x^n)$ comme voulu.

Théorème (Unicité des coefficients d'un développement limité) Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une application, $a \in \bar{I} \cap \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Si $a_0, a_1, \dots, a_n, b_0, b_1, \dots, b_n$ sont des réels et si :

$$\begin{cases} f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} a_0 + a_1(x-a) + \dots + a_n(x-a)^n + o((x-a)^n) \\ f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} b_0 + b_1(x-a) + \dots + b_n(x-a)^n + o((x-a)^n) \end{cases}, \quad \text{alors :} \quad \forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad a_k = b_k.$$

Démonstration Raisonnons par l'absurde et supposons que l'assertion « $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, a_k = b_k$ » est fautive. Notons alors p le plus petit indice pour lequel $a_p \neq b_p$. On a alors :

$$0 \underset{x \rightarrow a}{=} (b_p - a_p)(x-a)^p + (b_{p+1} - a_{p+1})(x-a)^{p+1} + \dots + o((x-a)^n),$$

donc après troncature : $0 \underset{x \rightarrow a}{=} (b_p - a_p)(x-a)^p + o((x-a)^p)$, ou encore : $0 \underset{x \rightarrow a}{\sim} (b_p - a_p)(x-a)^p$. Or que signifie être équivalent à 0 au voisinage de a ? Cela signifie être **égal**, rigoureusement égal à 0 au voisinage de a . L'égalité $a_p = b_p$ en découle — contradiction. ■

Le résultat suivant est une conséquence immédiate des définitions de la continuité et de la dérivabilité en un point.

Théorème (Développement limité, continuité, dérivabilité) Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une application et $a \in I$.

- f est continue en a si et seulement si f possède un développement limité à l'ordre 0 au voisinage de a .

Précisément : $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} f(a) + o(1)$. Le coefficient d'ordre 0 d'un développement limité de f en a est systématiquement égal à $f(a)$.

- f est dérivable en a si et seulement si f possède un développement limité à l'ordre 1 au voisinage de a .

Précisément : $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} f(a) + f'(a)(x-a) + o(x-a)$. Le coefficient d'ordre 1 d'un développement limité de f en a est systématiquement égal à $f'(a)$.

*** **Attention !** Malheureusement, il est faux en général qu'on retrouve $f^{(k)}(a)$ au niveau du coefficient d'ordre k d'un développement limité si $k \geq 2$. L'exemple suivant vous en convaincra. On pose, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} \sin\left(e^{\frac{1}{x^2}}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}. \quad \text{Bien sûr, } f \text{ est de classe } \mathcal{C}^\infty \text{ sur } \mathbb{R}^\times.$$

- Soit $n \in \mathbb{N}^\times$. Pour tout $x \in \mathbb{R}^\times$: $\left| \frac{f(x)}{x^n} \right| \leq \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^n} = \left(\frac{2}{nx^2} e^{-\frac{2}{nx^2}} \right)^{\frac{n}{2}} \left(\frac{n}{2} \right)^{\frac{n}{2}}$.

Or $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{nx^2} = \infty$ et $\lim_{u \rightarrow \infty} u e^{-u} = 0$, donc par composition $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{nx^2} e^{-\frac{2}{nx^2}} = 0$. Le théorème des gendarmes montre finalement que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^n} = 0$, i.e. que : $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} o(x^n)$. Ceci montre que f possède un développement limité à tout ordre au voisinage de 0 — dont la partie polynomiale est toujours nulle, bien que f ne soit pas identiquement nulle au voisinage de 0!

- En particulier, $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} o(x)$. Le théorème précédent montre donc que f est continue et même dérivable en 0 et que $f(0) = f'(0) = 0$. La dérivée f' de f est donc définie sur \mathbb{R} tout entier.

- Montrons que f' n'est pas continue en 0 — donc encore moins dérivable en 0, ce qui montrera que $f''(0)$ en particulier n'est pas défini.

Pour tout $x \in \mathbb{R}^\times$, un calcul classique de dérivée montre que : $f'(x) = \frac{2f(x)}{x^3} - \frac{2}{x^3} \cos\left(e^{\frac{1}{x^2}}\right)$. Mais nous avons déjà montré que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2f(x)}{x^3} = 0$. Pour montrer que f' n'est pas continue en 0, il nous suffit donc de montrer que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{x^3} \cos\left(e^{\frac{1}{x^2}}\right)$ n'est pas égale à $f'(0) = 0$ via la caractérisation séquentielle de la limite.

Or posons, pour tout $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, $u_n = \frac{1}{\sqrt{\ln(2n\pi)}}$. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$: $\frac{2}{u_n^3} \cos\left(e^{\frac{1}{u_n^2}}\right) = \frac{2}{u_n^3} = (\ln(2n\pi))^{\frac{3}{2}}$.

Par conséquent $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{u_n^3} \cos\left(e^{\frac{1}{u_n^2}}\right) = \infty \neq 0 = f'(0)$, comme voulu.

- Concluons. La fonction f a beau admettre un développement limité à tout ordre au voisinage de 0, elle n'en est pas pour autant infiniment dérivable en 0; elle est bien continue et dérivable en 0, mais pas même deux fois dérivable en 0. Le coefficient de degré 2 de son développement limité ne peut donc en aucune façon représenter $f''(0)$.

*** **Attention !** Comme l'exemple précédent le montre, f peut très bien admettre un développement limité à tout ordre sans pour autant que f' possède ne serait-ce qu'un développement limité à l'ordre 2.

Théorème (Développements limités et parité/imparité) Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une application et $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $0 \in \bar{I}$ et que f possède un développement limité à l'ordre n au voisinage de 0 : $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n + o(x^n)$, où $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$.

- (i) Si f est paire, les coefficients de rang impair du développement limité ci-dessus sont nuls : $a_1 = a_3 = a_5 = \dots = 0$.
- (ii) Si f est impaire, les coefficients de rang pair du développement limité ci-dessus sont nuls : $a_0 = a_2 = a_4 = \dots = 0$.

Démonstration Composant à droite par $x \mapsto -x$ le développement limité de f , nous obtenons un développement limité de $x \mapsto f(-x)$ à l'ordre n au voisinage de 0 :

$$f(-x) \underset{x \rightarrow 0}{=} a_0 - a_1x + a_2x^2 - a_3x^3 + \dots + (-1)^n a_nx^n + o(x^n).$$

- Supposons f paire. Nous avons en fait obtenu ci-dessus une nouvelle expression du développement limité de f à l'ordre n au voisinage de 0. Par unicité des coefficients d'un développement limité, on en déduit les égalités : $a_0 = a_0$, $a_1 = -a_1$, $a_2 = a_2$, $a_3 = -a_3$, \dots $a_n = (-1)^n a_n$ dont le résultat est une conséquence immédiate.
- Supposons f impaire. Nous avons en fait obtenu ci-dessus une nouvelle expression du développement limité de $-f$ à l'ordre n au voisinage de 0. Par unicité des coefficients d'un développement limité, on en déduit les égalités : $-a_0 = a_0$, $-a_1 = -a_1$, $-a_2 = a_2$, $-a_3 = -a_3$, \dots $-a_n = (-1)^n a_n$ dont le résultat est une conséquence immédiate. ■

2 PRIMITIVATION DES DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS

FORMULE DE TAYLOR-YOUNG

2.1 PRIMITIVATION DES DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS

Lemme Soient $f \in \mathcal{D}(I, \mathbb{R})$, $a \in I$ et $n \in \mathbb{N}$. Si : $f'(x) \underset{x \rightarrow a}{=} o((x-a)^n)$, alors : $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} f(a) + o((x-a)^{n+1})$.

⌘ ⌘ ⌘ **Explication** Ce lemme est un premier pas vers la primitivation des développements limités.

Démonstration Soit $\varepsilon > 0$. Puisque $f'(x) \underset{x \rightarrow a}{=} o((x-a)^n)$, il existe $\alpha > 0$ tel que :

$$\forall x \in I, \quad |x-a| \leq \alpha \implies |f'(x)| \leq \varepsilon |x-a|^n.$$

Fixons $x \in I$ tel que $|x-a| \leq \alpha$. Puisque f est dérivable sur I , le théorème des accroissements finis affirme l'existence d'un réel c compris entre a et x tel que $f'(c) = \frac{f(x) - f(a)}{x-a}$. Alors :

$$|f(x) - f(a)| = |f'(c)| \times |x-a| \leq \varepsilon |c-a|^n \times |x-a| \leq \varepsilon |x-a|^{n+1}.$$

L'inégalité $|c-a| \leq |x-a|$ provient du fait que c est compris entre a et x . Nous avons bien montré comme voulu que : $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} f(a) + o((x-a)^{n+1})$. ■

Théorème (Primitivation des développements limités) Soient $f \in \mathcal{D}(I, \mathbb{R})$, $a \in I$ et $n \in \mathbb{N}$. Si f' possède un développement limité à l'ordre n au voisinage de a : $f'(x) \underset{x \rightarrow a}{=} \sum_{k=0}^n a_k(x-a)^k + o((x-a)^n)$ où $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, alors f possède un développement limité à l'ordre $(n+1)$ au voisinage de a : $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} f(a) + \sum_{k=0}^n a_k \frac{(x-a)^{k+1}}{k+1} + o((x-a)^{n+1})$.

⌘ ⌘ ⌘ **Explication** Bref, on peut **toujours** primitiver terme à terme le développement limité d'une dérivée.

⌘⌘⌘ **Attention !** N'oubliez pas le terme initial $f(a)$ dans le membre de droite ; c'est la fameuse « constante d'intégration ».

Démonstration Notons g l'application $x \mapsto f(x) - f(a) - \sum_{k=0}^n a_k \frac{(x-a)^{k+1}}{k+1}$ définie sur I . Alors g est dérivable sur I et sa dérivée g' est l'application $x \mapsto f'(x) - \sum_{k=0}^n a_k (x-a)^k$. Par hypothèse, on a donc : $g'(x) \underset{x \rightarrow a}{=} o((x-a)^n)$. Le lemme précédent affirme aussitôt que : $g(x) \underset{x \rightarrow a}{=} o((x-a)^{n+1})$, car $g(a) = 0$. C'est le résultat cherché. ■

Exemple Pour tout $n \in \mathbb{N}^\times$: $\ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} + o(x^n) \underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + o(x^n)$.

En effet Soit $n \in \mathbb{N}^\times$. Nous avons déjà démontré le développement limité suivant : $\frac{1}{1-x} \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^{n-1} x^k + o(x^{n-1})$.

Nous avons donc aussi : $\frac{1}{1+x} \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k x^k + o(x^{n-1})$ par composition à droite avec la fonction $x \mapsto -x$. Primitivant alors ce développement limité, nous obtenons le résultat voulu :

$$\ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \ln(1+0) + \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1} + o(x^n) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} + o(x^n).$$

Exemple Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\text{Arctan } x \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2n+1}) \underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+1})$.

On remarque que les coefficients de rang pair sont tous nuls ; c'était prévisible, car la fonction arctangente est impaire.

En effet Soit $n \in \mathbb{N}$. Nous avons déjà démontré le développement limité suivant : $\frac{1}{1-x} \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n x^k + o(x^n)$.

Nous avons donc aussi : $\frac{1}{1+x^2} \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n (-1)^k x^{2k} + o(x^{2n})$ par composition à droite avec la fonction $x \mapsto -x^2$. Primitivant alors ce développement limité, nous obtenons le résultat voulu :

$$\text{Arctan } x \underset{x \rightarrow 0}{=} \text{Arctan } 0 + \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2n+1}) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2n+1}).$$

2.2 FORMULE DE TAYLOR-YOUNG

Théorème (Formule de Taylor-Young) Soient $n \in \mathbb{N}$, $f \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$ et $a \in I$. Alors f possède un développement limité à l'ordre n au voisinage de a . Précisément : $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + o((x-a)^n)$.

⚡ ⚡ ⚡ **Explication** Ce résultat, en particulier, est un théorème d'**existence** de développements limités. Notez que, pour le moment, nous avons seulement un critère d'existence pour les développements limités à l'ordre 0 (continuité) et à l'ordre 1 (dérivabilité).

⚡⚡⚡ **Attention !** La formule de Taylor-Young fournit les développements limités des fonctions usuelles à tout ordre, puisque les fonctions usuelles (\exp , \ln , \sin , \cos ...) sont de classe \mathcal{C}^∞ sur leurs domaines de définition respectifs, sauf éventuellement aux bornes ($\sqrt{\cdot}$, Arcsin ...). Cela dit, tout développement limité ne provient pas de la formule de Taylor-Young : comme nous l'avons remarqué dans un exemple précédent, une fonction peut posséder un développement limité à tout ordre sans être dérivable que deux fois au point considéré ; pour une telle fonction, Taylor-Young est désespérément muet.

Démonstration On raisonne par récurrence. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la proposition à démontrer au rang n est la suivante : $\forall f \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{R}), f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + o((x-a)^n)$.

• **Initialisation** : Nous savons déjà que pour toute fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue : $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} f(a) + o(1)$.

- **Hérédité** : Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose la proposition à démontrer vraie au rang n . Soit $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I, \mathbb{R})$. Alors f' est de classe \mathcal{C}^n sur I , donc par hypothèse :

$$f'(x) \underset{x \rightarrow a}{=} \sum_{k=0}^n \frac{(f')^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + o((x-a)^n) \underset{x \rightarrow a}{=} \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k+1)}(a)}{k!} (x-a)^k + o((x-a)^n).$$

Le théorème de primitivation des développements limités montre aussitôt le résultat souhaité :

$$\begin{aligned} f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} f(a) + \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k+1)}(a)}{k!(k+1)} (x-a)^{k+1} + o((x-a)^{n+1}) &\underset{x \rightarrow a}{=} f(a) + \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k+1)}(a)}{(k+1)!} (x-a)^{k+1} + o((x-a)^{n+1}) \\ &\underset{x \rightarrow a}{=} f(a) + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + o((x-a)^{n+1}) \underset{x \rightarrow a}{=} \sum_{k=0}^{n+1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + o((x-a)^{n+1}). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Exemple Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $e^x \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + o(x^n) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n).$

En effet Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction exponentielle est de classe \mathcal{C}^n sur \mathbb{R} , donc elle possède un développement limité à l'ordre n au voisinage de 0 via la formule de Taylor-Young. Par ailleurs elle coïncide avec toutes ses dérivées successives. Du coup : $e^x \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n \frac{\exp^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(x^n) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n \frac{e^0}{k!} x^k + o(x^n) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + o(x^n).$

Exemple Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$(1+x)^\alpha \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{6} x^3 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + o(x^n).$$

En effet Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. La fonction $x \mapsto (1+x)^\alpha$ est de classe \mathcal{C}^n sur $] -1, \infty[$ et pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, sa dérivée $k^{\text{ème}}$ est la fonction $x \mapsto \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k}$. La formule de Taylor donne aussitôt le résultat annoncé.

   **En pratique (Dérivation des développements limités)** Soient $n \in \mathbb{N}$, $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I, \mathbb{R})$ et $a \in I$. Alors via la formule de Taylor, f possède un développement limité à l'ordre $(n+1)$, et f' un développement limité à l'ordre n au voisinage de a . Précisément :

$$f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} \sum_{k=0}^{n+1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + o((x-a)^{n+1}) \quad \text{et} \quad f'(x) \underset{x \rightarrow a}{=} \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k+1)}(a)}{k!} (x-a)^k + o((x-a)^n).$$

On remarque alors — essayez, ça marche — que le développement limité de f' s'obtient en dérivant terme à terme le développement limité de f .

✕ ✕ ✕ Attention ! Nous avons vu dans un exemple précédent, un peu tordu, qu'une fonction pouvait admettre un développement limité à tout ordre sans être ne serait-ce que deux fois dérivable au point considéré. Cela implique que la dérivation des développements limités n'est pas une opération aussi naturelle que leur primitivation. Nous savons déjà que **TOUT** développement limité de dérivée pouvait être primitivé; au contraire, si l'on veut dériver un développement limité sans problème, une condition de régularité est nécessaire — ci-dessus, être de classe \mathcal{C}^{n+1} , ce qui permet l'utilisation de la formule de Taylor-Young.

Exemple Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\frac{1}{(1-x)^2} \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n (k+1)x^k + o(x^n) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots + (n+1)x^n + o(x^n).$

En effet Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction $x \mapsto \frac{1}{1-x}$ est de classe \mathcal{C}^{n+1} sur $] -\infty, 1[$ et nous connaissons son développement limité à l'ordre $(n+1)$ au voisinage de 0 : $\frac{1}{1-x} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^{n+1} + o(x^{n+1})$. Il suffit de dériver terme à terme ce développement pour obtenir le résultat annoncé.

3 DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS USUELS

Théorème (Développements limités usuels)

1) **Logarithme, exponentielle, puissances :**

$$\frac{1}{1-x} \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n x^k + o(x^n) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x + x^2 + \dots + x^n + o(x^n).$$

$$\ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} + o(x^n) \underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^n \frac{x^n}{n} + o(x^n).$$

$$e^x \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + o(x^n) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n).$$

Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$: $(1+x)^\alpha \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{6} x^3 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + o(x^n).$

2) **Fonctions trigonométriques circulaires :**

$$\sin x \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+1}) \underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1}).$$

$$\cos x \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n}) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n}).$$

3) **Arctangente :**

$$\text{Arctan } x \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2n+1}) \underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+1}).$$

3) **Fonctions trigonométriques hyperboliques :**

$$\text{sh } x \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+1}) \underset{x \rightarrow 0}{=} x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1}).$$

$$\text{ch } x \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n}) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n}).$$

***** Attention !** Ce tableau ne contient aucun développement limité de la fonction tangente. C'est qu'en fait la formule générale du développement limité de \tan est plus compliquée que les formules précédentes. Nous verrons cependant comment nous pouvons obtenir des développements limités de \tan pour de petits ordres.

Démonstration Il nous reste à démontrer les formules pour \sin , \cos , sh et ch .

- Pour \sin et \cos , il suffit de remarquer que $\sin^{(k)}(x) = \sin\left(x + \frac{k\pi}{2}\right)$ et $\cos^{(k)}(x) = \cos\left(x + \frac{k\pi}{2}\right)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$. Aussitôt : $\forall k \in \mathbb{N}, \begin{cases} \sin^{(2k)}(0) = 0 \\ \sin^{(2k+1)}(0) = (-1)^k \end{cases}$ et $\begin{cases} \cos^{(2k)}(0) = (-1)^k \\ \cos^{(2k+1)}(0) = 0 \end{cases}$. Associées à la formule de Taylor-Young, ces formules nous donnent notre résultat.

- Pour sh et ch , il faut revenir à la définition de ces fonctions. Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\text{sh } x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{x^k}{k!} - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k \frac{x^k}{k!} + o(x^{2n+1}) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+1}).$$

Explication : les termes de rang pair des deux sommes se simplifient deux à deux, et les termes de rang impair sont comptés deux fois, mais aussitôt divisés par 2. Démonstration analogue pour la fonction ch . ■

4 OPÉRATIONS SUR LES DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS

Par commodité, les résultats de ce paragraphe, très importants en pratique, sont énoncés au voisinage de 0. On suppose donc ici que $0 \in I$.

Théorème (Somme, multiplication par un scalaire et produit) Soient $n \in \mathbb{N}$ et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ deux applications. On suppose que f et g possèdent un développement limité à l'ordre n au voisinage de 0 :

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} A(x) + o(x^n) \quad \text{et} \quad g(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} B(x) + o(x^n), \quad \text{où } A, B \in \mathbb{R}_n[X].$$

(i) **Somme** : $(f + g)$ possède un développement limité à l'ordre n au voisinage de 0 :

$$(f + g)(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} (A + B)(x) + o(x^n).$$

(ii) **Multiplication par un scalaire** : Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, λf possède un développement limité à l'ordre n au voisinage de 0 :

$$\lambda f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \lambda A(x) + o(x^n).$$

(iii) **Produit** : fg possède un développement limité à l'ordre n au voisinage de 0 :

$$fg(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} C(x) + o(x^n),$$

où C est le polynôme AB tronqué à l'ordre n , i.e. auquel on a soustrait tous les monômes de degré strictement supérieur à n .

⚡ ⚡ ⚡ **Explication** Dans l'assertion (iii), comment détermine-t-on le polynôme C à partir des polynômes A et B , n étant fixé? Voyons cela sur un exemple. Pour $A = X^2 + 1$, $B = 2X + 3$ et $n = 1$, on a $AB = 2X^3 + 3X^2 + \underbrace{2X + 3}_C$.

⚡ ⚡ ⚡ **Attention !** Le produit de deux développements limités à l'ordre n n'est pas un développement limité à l'ordre $2n$, mais un développement limité à l'ordre n . Remarque importante!

Démonstration

(i) et (ii) Nous connaissons déjà ces deux propriétés.

(iii) Par définition de C , X^{n+1} divise $AB - C$; il existe donc un polynôme D tel que $AB = C + X^{n+1}D$.

$$fg(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} (A(x) + o(x^n))(B(x) + o(x^n)) = A(x)B(x) + A(x)o(x^n) + B(x)o(x^n) + o(x^n)o(x^n) \underset{x \rightarrow 0}{=} AB(x) + o(x^n).$$

On a pu simplifier ici car $A(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} O(1)$ et $B(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} O(1)$. Poursuivons :

$$fg(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} C(x) + x^{n+1}D(x) + o(x^n) \underset{x \rightarrow 0}{=} C(x) + x^{n+1}O(1) + o(x^n) \underset{x \rightarrow 0}{=} C(x) + o(x^n). \quad \text{Et voilà.} \quad \blacksquare$$

Exemple $e^x \cos x + 2 \sin x \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + 3x - \frac{2x^3}{3} + o(x^3).$

En effet On ne vous demande pas de justifier vos troncatures avec force de détails; vous devez savoir calculer vite les développements limités.

$$\begin{aligned} e^x \cos x + 2 \sin x &\underset{x \rightarrow 0}{=} \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) \left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)\right) + 2 \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} \left(1 + x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right) + \left(2x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + 3x - \frac{2x^3}{3} + o(x^3). \end{aligned}$$

🔧 🔧 🔧 **En pratique (Puissances entières)** L'assertion (iii) du précédent théorème, généralisée à plus de deux termes, permet le calcul du développement limité des puissances entières d'une fonction. Si $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} A(x) + o(x^n)$, et si, pour $p \in \mathbb{N}$ fixé, B est le polynôme A^p auquel on a soustrait tous les monômes de degré inférieur ou égal à n , alors : $f(x)^p \underset{x \rightarrow 0}{=} B(x) + o(x^n)$.

Exemple $\left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right)^3 \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - \frac{3x}{2} + \frac{7x^2}{4} + o(x^2)$.

En effet On a : $\ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$, donc : $\frac{\ln(1+x)}{x} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + o(x^2)$. Alors :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right)^3 &\underset{x \rightarrow 0}{=} \left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + o(x^2)\right)^2 \left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + o(x^2)\right) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} \left(1 - x + \frac{11x^2}{12} + o(x^2)\right) \left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + o(x^2)\right) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - \frac{3x}{2} + \frac{7x^2}{4} + o(x^2). \end{aligned}$$

Théorème (Composition) Soient $n \in \mathbb{N}$ et $f : I \rightarrow J$ et $g : J \rightarrow \mathbb{R}$ deux applications. On suppose que f et g possèdent un développement limité à l'ordre n au voisinage de 0 :

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} A(x) + o(x^n) \quad \text{et} \quad g(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} B(x) + o(x^n), \quad \text{où } A, B \in \mathbb{R}_n[X].$$

On suppose en outre que $A(0) = 0$, i.e. que le coefficient constant de A est nul. Alors $g \circ f$ possède un développement limité à l'ordre n au voisinage de 0 :

$$g \circ f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} C(x) + o(x^n),$$

où C est le polynôme $B \circ A$ auquel on a soustrait tous les monômes de degré strictement supérieur à n .

⚡ ⚡ ⚡ **Explication** Dans l'assertion (iii), comment détermine-t-on le polynôme C à partir des polynômes A et B , n étant fixé? Voyons cela sur un exemple. Pour $A = X^2$, $B = 4X^2 + X + 1$ et $n = 2$, on a $B \circ A = 4X^4 + \underbrace{X^2 + 1}_C$.

⚡ ⚡ ⚡ **Attention !**

- L'hypothèse « $A(0) = 0$ », qui signifie que $\lim_{x \rightarrow 0} f = 0$, est fondamentale. Sans elle la composition de deux développements limités au voisinage de 0 n'a aucun sens.
- Pour obtenir un développement limité de $g \circ f$ en a à l'ordre n , on doit absolument développer f et g à l'ordre n .

Démonstration Notons b_0, b_1, \dots, b_n les coefficients de B , de sorte que $B = \sum_{k=0}^n b_k X^k$. Par définition de C , X^{n+1} divise $B \circ A - C$; il existe donc un polynôme D tel que $B \circ A = C + X^{n+1}D$.

Remarquons par ailleurs que, puisque $A(0) = 0$, alors $f(x) \underset{x \rightarrow \infty}{=} \lambda x + o(x)$ pour un certain $\lambda \in \mathbb{R}$. En particulier $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} O(x)$, et donc $f(x)^n \underset{x \rightarrow 0}{=} O(x^n)$ par produit.

Finalement :

$$\begin{aligned} g \circ f(x) &\underset{x \rightarrow 0}{=} B(f(x)) + o(f(x)^n) \underset{x \rightarrow 0}{=} B(f(x)) + o(x^n) \quad \text{car } f(x)^n \underset{x \rightarrow 0}{=} O(x^n) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n b_k f(x)^k + o(x^n) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n b_k (A(x)^k + o(x^n)) + o(x^n) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n b_k A(x)^k + o(x^n) \underset{x \rightarrow 0}{=} B \circ A(x) + o(x^n) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} C(x) + x^{n+1}D(x) + o(x^n) \underset{x \rightarrow 0}{=} C(x) + x^{n+1}O(1) + o(x^n) \underset{x \rightarrow 0}{=} C(x) + o(x^n). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Exemple $\ln \cos x \underset{x \rightarrow 0}{=} -\frac{x^2}{2} + o(x^3)$.

En effet On a : $\ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$ d'une part, et : $\cos x - 1 \underset{x \rightarrow 0}{=} -\frac{x^2}{2} + o(x^3)$ d'autre part. Du coup : $\ln \cos x \underset{x \rightarrow 0}{=} \left(-\frac{x^2}{2}\right) - \frac{1}{2} \left(-\frac{x^2}{2}\right)^2 + \frac{1}{3} \left(-\frac{x^2}{2}\right)^3 + o(x^3) \underset{x \rightarrow 0}{=} -\frac{x^2}{2} + o(x^3)$.

🔗 🔗 🔗 **En pratique (Inverse)** La composition des développements limités permet d'inverser les développements limités, au moyen de la formule : $\frac{1}{1-x} \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n x^k + o(x^n)$ valable pour tout $n \in \mathbb{N}$. Des exemples valent ici mieux qu'un long discours, en voici deux.

Exemple $\frac{1}{\cos x} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + o(x^4)$ et $\tan x \underset{x \rightarrow 0}{=} x + \frac{x^3}{3} + o(x^4)$.

En effet On a : $\cos x \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$ et $\frac{1}{1-x} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + o(x^4)$. Donc :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\cos x} \underset{x \rightarrow 0}{=} & \frac{1}{1 - \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right)} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24}\right) + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24}\right)^2 + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24}\right)^3 + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24}\right)^4 + o(x^4) \\ & \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24}\right) + \left(\frac{x^4}{4}\right) + o(x^4) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + o(x^4). \end{aligned}$$

Nous pouvons du coup en déduire un développement limité de la fonction tangente au voisinage de 0 :

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \underset{x \rightarrow 0}{=} \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right) \left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + o(x^4)\right) \underset{x \rightarrow 0}{=} x + \frac{x^3}{3} + o(x^4).$$

Exemple $\frac{x}{e^x - 1} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{12} + o(x^2)$.

En effet

$$\begin{aligned} \frac{x}{e^x - 1} \underset{x \rightarrow 0}{=} & \frac{x}{x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)} \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{1}{1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + o(x^2)} \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{1}{1 - \left(-\frac{x}{2} - \frac{x^2}{6} + o(x^2)\right)} \\ & \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \left(-\frac{x}{2} - \frac{x^2}{6}\right) + \left(-\frac{x}{2} - \frac{x^2}{6}\right)^2 + o(x^2) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{12} + o(x^2). \end{aligned}$$

Vous noterez bien que nous avons dû développer l'exponentielle à l'ordre 3 pour obtenir un développement limité de $x \mapsto \frac{x}{e^x - 1}$ à l'ordre 2 au voisinage de 0. Comprenez-vous pourquoi ?

Achevons ce paragraphe avec quelques remarques pratiques. Comprenez-les impérativement. Sans elles vous êtes perdus.

En pratique

- Soit à calculer un développement limité de $x \mapsto \frac{\sin(x^2)}{x}$ à l'ordre 5 au voisinage de 0. Pour obtenir un tel résultat, à quel ordre convient-il de développer sin au voisinage de 0 ? Deux risques se présentent : si notre développement du sinus est trop précis, nous allons effectuer de longs calculs inutilement ; si au contraire notre développement du sinus n'est pas assez précis, nous n'obtiendrons jamais le résultat escompté. Pour ces deux raisons, il est important de pouvoir prévoir à l'avance quelles précisions doivent être utilisées dans les calculs.

Calculer un développement limité de $x \mapsto \frac{\sin(x^2)}{x}$ à l'ordre 5 au voisinage de 0 revient à calculer un développement limité de $x \mapsto \sin(x^2)$ à l'ordre 6 au voisinage de 0. Pour effectuer un tel calcul, on partira d'un développement limité du sinus à l'ordre 3 au voisinage de 0. Dans l'ordre, on aura donc :

$$\sin x \underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{x^3}{6} + o(x^3),$$

$$\text{puis } \sin(x^2) \underset{x \rightarrow 0}{=} x^2 - \frac{x^6}{6} + o(x^6) \text{ par composition à droite avec la fonction } x \mapsto x^2,$$

$$\text{et enfin } \frac{\sin(x^2)}{x} \underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{x^5}{6} + o(x^5).$$

- Soit à calculer un développement limité de $x \mapsto \sin^5 x$ à l'ordre 7 au voisinage de 0. Première idée : on développe sin à l'ordre 7 au voisinage de 0, puis on calcule la puissance 5^{ème} de ce développement. Malheureusement cette idée conduit à des calculs tout à fait inhumains. Nous allons donc tâcher de raffiner notre méthode.

Remarquons qu'on a : $\sin x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$, et donc : $\sin^5 x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x^5$. Le premier terme non nul du développement limité de $x \mapsto \sin^5 x$ au voisinage de 0 est donc x^5 . Calculer un développement limité de $x \mapsto \sin^5 x$ à l'ordre 7 au voisinage de 0 revient donc à calculer un développement limité de $x \mapsto \frac{\sin^5 x}{x^5} = \left(\frac{\sin x}{x}\right)^5$ à l'ordre 2 au voisinage de 0. Dans l'ordre, on rédigera ainsi sa réponse :

$$\sin x \underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{x^3}{6} + o(x^3), \text{ donc } \frac{\sin x}{x} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - \frac{x^2}{6} + o(x^2),$$

$$\text{puis } \frac{\sin^5 x}{x^5} = \left(\frac{\sin x}{x}\right)^5 \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - \frac{5x^2}{6} + o(x^2),$$

$$\text{et enfin } \sin^5 x \underset{x \rightarrow 0}{=} x^5 - \frac{5x^7}{6} + o(x^7). \quad \text{Méthode rapide !}$$

5 EXEMPLES ET APPLICATIONS

5.1 DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS AU VOISINAGE D'UN POINT AUTRE QUE 0

Exemple $\ln x \underset{x \rightarrow 2}{=} \ln 2 + \frac{x-2}{2} - \frac{(x-2)^2}{8} + \frac{(x-2)^3}{24} + o((x-2)^3).$

En effet On ramène le problème en 0. Chercher un développement limité de $x \mapsto \ln x$ à l'ordre 3 au voisinage de 2 revient à chercher un développement limité de $h \mapsto \ln(2+h)$ à l'ordre 3 au voisinage de 0. Or :

$$\ln(2+h) = \ln 2 + \ln \left(1 + \frac{h}{2}\right) \underset{h \rightarrow 0}{=} \ln 2 + \frac{h}{2} - \frac{h^2}{8} + \frac{h^3}{24} + o(h^3).$$

On revient à la fonction $x \mapsto \ln x$ en effectuant le changement de variable $x = 2 + h$.

Exemple $\cos x \underset{x \rightarrow \frac{\pi}{4}}{=} \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \left(x - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 + \frac{1}{6\sqrt{2}} \left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3 + o\left[\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3\right].$

En effet On ramène le problème en 0. Chercher un développement limité de $x \mapsto \cos x$ à l'ordre 3 au voisinage de $\frac{\pi}{4}$ revient à chercher un développement limité de $h \mapsto \cos\left(\frac{\pi}{4} + h\right)$ à l'ordre 3 au voisinage de 0. Or :

$$\cos\left(\frac{\pi}{4} + h\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\cos h - \sin h) \underset{h \rightarrow 0}{=} \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\left(1 - \frac{h^2}{2} + o(h^3)\right) - \left(h - \frac{h^3}{6} + o(h^3)\right)\right] \underset{h \rightarrow 0}{=} \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{h}{\sqrt{2}} - \frac{h^2}{2\sqrt{2}} + \frac{h^3}{6\sqrt{2}} + o(h^3).$$

On revient à la fonction $x \mapsto \cos x$ en effectuant le changement de variable $x = \frac{\pi}{4} + h$.

5.2 CALCULS DE LIMITES ET RECHERCHE D'ÉQUIVALENTS

Exemple $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x} - x}{x^3} = \frac{1}{8}.$

En effet Nous allons utiliser des développements limités, mais à quel ordre faut-il pousser ces développements ? Puisqu'on cherche une limite c'est la précision $o(1)$ qui est requise, au pire : nous devons donc chercher un développement limité de $x \mapsto \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x} - x}{x^3}$ à l'ordre 0 au voisinage de 0, à partir d'un développement limité de $x \mapsto \sqrt{1+x}$ et $x \mapsto \sqrt{1-x}$ à l'ordre 3 au voisinage de 0 (à cause de la division par x^3).

$$\frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x} - x}{x^3} \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{\left(1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + o(x^3)\right) - \left(1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{16} + o(x^3)\right) - x}{x^3} \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{1}{8} + o(1).$$

Exemple $\ln(1+x^2) - \sin^2 x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\frac{x^4}{6}.$

En effet Nous cherchons un équivalent de $x \mapsto \ln(1+x^2) - \sin^2 x$ au voisinage de 0. Nous savons que, dans un développement limité, le premier terme non nul est un équivalent de la fonction considérée. Nous sommes donc à la recherche du premier terme non nul du développement limité de $x \mapsto \ln(1+x^2) - \sin^2 x$ au voisinage de 0. Mais à quel ordre devons-nous pousser nos développements ? Nous n'avons malheureusement ici aucune façon de le savoir, sauf à faire le calcul explicitement. Dans ce genre de situation, nous sommes obligés de tâtonner en commençant par l'ordre 0, puis l'ordre 1... jusqu'à obtenir le résultat souhaité.

Laissons ici de côté les échecs, ne donnons que le calcul qui marche — lui seul doit apparaître sur une copie.

$$\begin{aligned} \ln(1+x^2) - \sin^2 x \underset{x \rightarrow 0}{=} \left(x^2 - \frac{x^4}{2} + o(x^4)\right) - \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^2 &\underset{x \rightarrow 0}{=} \left(x^2 - \frac{x^4}{2} + o(x^4)\right) - \left(x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^4)\right) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} -\frac{x^4}{6} + o(x^4). \end{aligned} \quad \text{Le résultat s'en déduit aussitôt.}$$

5.3 DÉVELOPPEMENTS ASYMPTOTIQUES

 **En pratique** Les développements limités s'avèrent utiles quand on cherche le comportement asymptotique — i.e. le comportement « limite » — d'une fonction au voisinage d'un point ; par exemple, pour l'étude des courbes paramétrées : détermination de l'équation d'une tangente, position relative d'une courbe par rapport à une autre...

Exemple Soit f l'application $x \mapsto \frac{x^2}{x+1} e^{\sin \frac{1}{x}} - 2x \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right)$ définie sur \mathbb{R}_+^\times . Alors : $f(x) \underset{x \rightarrow \infty}{\sim} x - 2 + \frac{3}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$. Comme en particulier $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - x + 2) = 0$, f possède une asymptote au voisinage de ∞ , d'équation $y = x - 2$. Mais on a plus précisément : $f(x) - x + 2 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{3}{2x}$, donc la fonction $x \mapsto f(x) - x + 2$ est strictement positive au voisinage de ∞ ; en d'autres termes, le graphe de f est au-dessus de son asymptote au voisinage de ∞ .

En effet Pour obtenir le développement asymptotique de f ci-dessus au voisinage de ∞ , commençons par nous ramener au voisinage de 0 ; nous pourrions ainsi peut-être utiliser nos développements limités usuels. Cette opération est effectuée ici au moyen d'un changement de variable $h = \frac{1}{x}$. Le résultat voulu peut être réécrit de la façon suivante : $f\left(\frac{1}{h}\right) \underset{h \rightarrow 0}{=} \frac{1}{h} - 2 + \frac{3h}{2} + o(h)$, ou encore : $hf\left(\frac{1}{h}\right) \underset{h \rightarrow 0}{=} 1 - 2h + \frac{3h^2}{2} + o(h^2)$. Nous sommes donc à la recherche du développement limité de la fonction $h \mapsto hf\left(\frac{1}{h}\right)$ à l'ordre 2 au voisinage de 0.

$$\begin{aligned} hf\left(\frac{1}{h}\right) &= h \left(\frac{\left(\frac{1}{h}\right)^2}{\frac{1}{h} + 1} e^{\sin h} - \frac{2}{h} \ln(1+h) \right) \underset{h \rightarrow 0}{=} \frac{1}{1+h} e^{\sin h} - 2 \ln(1+h) \underset{h \rightarrow 0}{=} (1-h+h^2+o(h^2))e^{h+o(h^2)} - 2 \left(h - \frac{h^2}{2} + o(h^2) \right) \\ &\underset{h \rightarrow 0}{=} (1-h+h^2+o(h^2)) \left(1+h + \frac{h^2}{2} + o(h^2) \right) - 2h + h^2 + o(h^2) \underset{h \rightarrow 0}{=} 1 - 2h + \frac{3h^2}{2} + o(h^2) \quad \text{comme voulu.} \end{aligned}$$

 **En pratique** Les développements limités servent souvent pour l'étude des suites. Par exemple, soit u_n le terme général d'une suite de limite nulle. Nous savons par exemple que : $e^{u_n} \underset{n \rightarrow \infty}{=} 1 + u_n + \frac{u_n^2}{2} + \frac{u_n^3}{6} + o(u_n^3)$. On a alors aussi le développement : $e^{u_n} \underset{n \rightarrow \infty}{=} 1 + u_n + \frac{u_n^2}{2} + \frac{u_n^3}{6} + o(u_n^3)$. Ce principe se généralise bien entendu.

Exemple Pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'équation $x^4 + x^3 = n$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}_+$ possède une unique solution notée x_n .

On a : $x_n \underset{n \rightarrow \infty}{=} \sqrt[4]{n} - \frac{1}{4} + \frac{3}{32\sqrt[4]{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt[4]{n}}\right)$

En effet

- La fonction $x \mapsto x^4 + x^3$ est strictement croissante sur \mathbb{R}_+ comme somme de fonctions strictement croissantes. Elle par ailleurs continue sur \mathbb{R}_+ . Elle réalise donc une bijection de \mathbb{R}_+ sur son image qui se trouve être aussi \mathbb{R}_+ . Or \mathbb{R}_+ contient \mathbb{N} , donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique $x_n \in \mathbb{R}_+$ tel que $x_n^4 + x_n^3 = n$. Nous noterons dans ce qui suit \clubsuit cette relation.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Peut-on avoir $x_n < 1$? Si c'est le cas, alors $n = x_n^4 + x_n^3 < 1 + 1 = 2$, donc $n = 1$. Du coup, pour $n \geq 2$, $x_n \geq 1$, et donc $x_n^4 \geq x_n^3$. Via \clubsuit , on en déduit que $x_n^4 \geq \frac{n}{2}$, puis que $x_n \geq \sqrt[4]{\frac{n}{2}}$. En particulier : $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$.
- Maintenant qu'on connaît $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, on peut affirmer que $x_n^3 \underset{n \rightarrow \infty}{=} o(x_n^4)$, de sorte que : $x_n^4 \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} n$ via \clubsuit , et donc : $x_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \sqrt[4]{n}$.
- Reprenons ensuite \clubsuit , mais mettons x_n^4 en facteur et composons avec la fonction $\sqrt[4]{\cdot}$. Cela nous donne, pour tout $n \in \mathbb{N}^\times$: $x_n = \sqrt[4]{n} \left(1 + \frac{1}{x_n}\right)^{-\frac{1}{4}}$ \spadesuit . Du coup :

$$x_n - \sqrt[4]{n} = \sqrt[4]{n} \left[\left(1 + \frac{1}{x_n}\right)^{-\frac{1}{4}} - 1 \right] \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \sqrt[4]{n} \times \frac{-1}{4x_n} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} -\frac{1}{4}. \quad \text{Conclusion : } x_n \underset{n \rightarrow \infty}{=} \sqrt[4]{n} - \frac{1}{4} + o(1).$$

- Nous souhaitons pousser un cran plus loin ce développement asymptotique. Les équivalents usuels suffisaient jusqu'ici, mais nous ne pouvons aller plus loin avec eux. Les développements limités vont donc prendre le relais. Nous allons bien sûr partir de la formule ♠ et du développement limité usuel :

$$(1+x)^{-\frac{1}{4}} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - \frac{x}{4} + \frac{5x^2}{32} - \frac{15x^3}{128} + o(x^3) \dots \quad \text{mais à quel ordre s'arrêter ?}$$

Puisque nous aurons à poser « $x = \frac{1}{x_n}$ », commençons par chercher un développement asymptotique de $\frac{1}{x_n}$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{x_n} &\underset{n \rightarrow \infty}{=} \frac{1}{\sqrt[4]{n} - \frac{1}{4} + o(1)} \underset{n \rightarrow \infty}{=} \frac{1}{\sqrt[4]{n}} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{4\sqrt[4]{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt[4]{n}}\right)} \underset{n \rightarrow \infty}{=} \frac{1}{\sqrt[4]{n}} \left[1 + \frac{1}{4\sqrt[4]{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt[4]{n}}\right) \right] \\ &\underset{n \rightarrow \infty}{=} \frac{1}{\sqrt[4]{n}} + \frac{1}{4\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right). \end{aligned}$$

Aurions-nous pu ici utiliser le développement limité plus précis : $\frac{1}{1-t} \underset{t \rightarrow 0}{=} 1 + t + t^2 + o(t^2)$, voire un développement limité plus précis encore ? A vrai dire, cela n'aurait rien donné de mieux. En effet, avec « $t = \frac{1}{4\sqrt[4]{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt[4]{n}}\right)$ », nous voyons apparaître un $o\left(\frac{1}{\sqrt[4]{n}}\right)$ dans le terme $1+t$, qui mange inévitablement les termes en t^2 .

- Finissons-en.

$$\begin{aligned} x_n &= \sqrt[4]{n} \left(1 + \frac{1}{x_n} \right)^{-\frac{1}{4}} \underset{n \rightarrow \infty}{=} \sqrt[4]{n} \left[1 - \frac{1}{4x_n} + \frac{5}{32x_n^2} + o\left(\frac{1}{x_n^2}\right) \right] \\ &\underset{n \rightarrow \infty}{=} \sqrt[4]{n} \left[1 - \frac{1}{4} \left(\frac{1}{\sqrt[4]{n}} + \frac{1}{4\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \right) + \frac{5}{32} \left(\frac{1}{\sqrt[4]{n}} + \frac{1}{4\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \right)^2 + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \right] \\ &\underset{n \rightarrow \infty}{=} \sqrt[4]{n} \left[1 - \frac{1}{4} \left(\frac{1}{\sqrt[4]{n}} + \frac{1}{4\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \right) + \frac{5}{32} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \right) + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \right] \\ &\underset{n \rightarrow \infty}{=} \sqrt[4]{n} \left[1 - \frac{1}{4\sqrt[4]{n}} + \frac{3}{32\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \right] \underset{n \rightarrow \infty}{=} \sqrt[4]{n} - \frac{1}{4} + \frac{3}{32\sqrt[4]{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt[4]{n}}\right). \end{aligned}$$

Aurions-nous fait mieux si nous avons poussé le développement limité de $\frac{1}{1-x}$ à l'ordre 3, voire plus ? Non, car nous voyons ci-dessus qu'avec « $x = \frac{1}{\sqrt[4]{n}} + \frac{1}{4\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ », le terme $1 - \frac{x}{4} + \frac{5x^2}{32}$ introduit un $o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ qui ne ferait qu'une bouchée des termes en x^3 .